EXERCICE N°3 : 6 points 25 '

1°) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1+x-x\ln x$.

a) Étudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5< x_0 <3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2°) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f\left(\sqrt{x_0}\right)=\dfrac{1}{2x_0}$.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$. (on prendra $x_0\approx 3,6$).

3°) Soit (a_n) la suite définie sur IN^* par : $a_n=\int_1^{\frac{1}{n}} f(t)dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Monter que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x\le f(x)\le\dfrac{1}{2}\ln x$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right)\le a_n\le 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$.

d) Monter alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

EXERCICE N°4 : 6 points 35 '

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x}$.

1°) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f=\left[\dfrac{1}{e},e\right]$.

2°) Soit G la fonction définie sur D_f par $G(x)=\int_1^{\ln x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur D_f et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in D_f$, $F(x)=G(x)+F(e)$ (où F est la primitive de f sur D_f qui s'annule en 1)

3°) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $H(x)=\int_1^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$.

b) Donner alors l'expression de $H(x)$.

4°) Déduire de ce qui précède l'aire de la partie du plan limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Qarray.tn-Agra Blech- Qarray.tn

Tous droits réservés © TakiAcademy.com